

19.03.2019

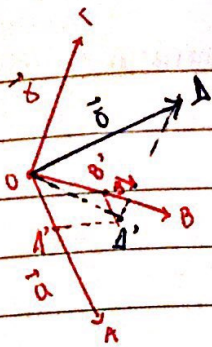
- 1) Δύο διανύσματα είναι δρ. εξαρτ. αν-ν είναι συγγραμικά.
- 2) Τρία διανύσματα είναι Γ.Ε. αν-ν είναι συνεπίπεδα. ($\dim V_2 = 2$)

ΠΡΟΤΑΣΗ: Τέσσερα διανύσματα του V_3 είναι παντού Γ.Ε.

ΠΟΡΙΣΜΑ: $\dim V_3 = 3$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρώ τυχαία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$

- Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Ε. τότε $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ είναι Γ.Ε.
- Υποθέτω ότι $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Α. Θεωρώ σημεία O, A, B, Γ, Δ
 $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{O\Gamma} = \vec{\gamma}, \vec{O\Delta} = \vec{\delta}$



Φέρω ευθεία $\Delta\Delta'$ $\parallel \delta$ η οποία τέμνει
το επίπεδο (O, A, B) στο Δ'

$$\vec{\delta} = \vec{OA} = \vec{OA'} + \vec{A'\Delta}, \quad \vec{A'\Delta} = \rho \vec{\delta}$$

Στο επίπεδο (O, A, B) φέρω ευθείες

$$A'\Delta' \parallel OB \text{ και } B'\Delta' \parallel OA. \text{ Τότε έχω } \vec{OA'} = \vec{OA'} + \vec{OB'}$$

$$\text{επιπλόν } \vec{OA'} = \lambda \vec{OA} = \lambda \vec{a} \text{ και } \vec{OB'} = \mu \vec{OB} = \mu \vec{b}$$

$$\text{επομένως } \vec{\delta} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{A'\Delta} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \rho \vec{\delta} \Rightarrow$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{\delta} \text{ είναι Γ.Ε.}$$

Έχω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ τυκώσα βάση του V_3 και $\vec{a} \in V_3$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{a}$ είναι Γ.Ε. δηλαδή υπάρχουν αριθμοί μ_1, μ_2, μ_3, μ ώστε
 $\mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \mu_3 \vec{e}_3 + \mu \vec{a} = \vec{0}$ και $|\mu_1| + |\mu_2| + |\mu_3| + |\mu| > 0$

Αρα $\mu \neq 0$ και επομένως

$$\vec{a} = \left(-\frac{\mu_1}{\mu}\right) \vec{e}_1 + \left(-\frac{\mu_2}{\mu}\right) \vec{e}_2 + \left(-\frac{\mu_3}{\mu}\right) \vec{e}_3$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 \\ \vec{a} &= \lambda'_1 \vec{e}_1 + \lambda'_2 \vec{e}_2 + \lambda'_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{0} = (\lambda_1 - \lambda'_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2) \vec{e}_2 + (\lambda_3 - \lambda'_3) \vec{e}_3$$

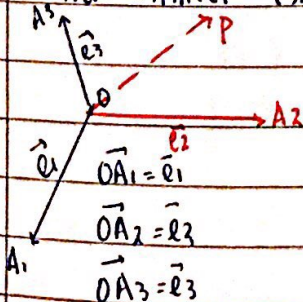
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda'_1, \lambda_2 = \lambda'_2, \lambda_3 = \lambda'_3$$

Η $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ είναι η συντεταγμένη του $\vec{a}$ ως προς τη
βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$\vec{b} = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \mu_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\lambda_1 + \mu_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) \vec{e}_2 + (\lambda_3 + \mu_3) \vec{e}_3$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda \lambda_1) \vec{e}_1 + (\lambda \lambda_2) \vec{e}_2 + (\lambda \lambda_3) \vec{e}_3$$



Έχω P τυχαίο σημείο

Το διάνυσμα $\vec{OP}$ καλείται διάνυσμα θέσης του P
ως προς το σημείο αναφοράς O .

$$P \sim \vec{OP}$$

$$\vec{OP} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

$$P \rightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{χωρίς } \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$$

1-3 m

Η απεικόνιση αυτή εξαρτάται από την επιλογή της βάσης.

Σύστημα συντεταγμένων: $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Αρχή 0

Άξονες Ox, Oy, Oz

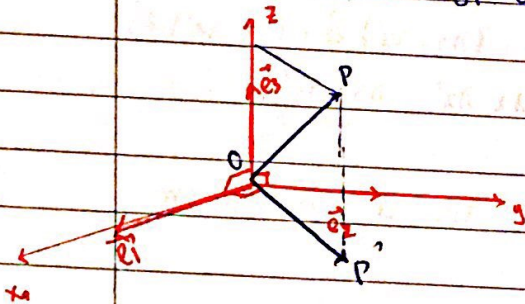
Συμβολισμός: $Oxyz$

Ορισμός: Οι αριθμοί (x, y, z) με την ιδιότητα $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ καλούνται **συντεταγμένες** του ακεραίου P ως προς το σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

$$\vec{a} \rightsquigarrow (a_1, a_2, a_3)$$

$$V_3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ } \delta P \text{ απεικ.}$$



$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ορθον. βάση δεξιόστροφη

$Oxyz$ ορθοκανονικό συστ. συντετ.

$$\|\vec{OP}\|^2 = \|\vec{OP'}\|^2 + \|\vec{P'P}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{AP'}\|^2 + \|\vec{P'P}\|^2$$

$$\vec{OA} = x\vec{e}_1$$

$$\vec{AP'} = y\vec{e}_2$$

$$\vec{P'P} = z\vec{e}_3$$

$$\|\vec{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$d(OP) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$P(x, y, z)$$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$P(x, y, z) \quad Q(x', y', z')$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \|\vec{OQ} - \vec{OP}\|$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OQ} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 \\ \vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{OQ} - \vec{OP} = (x' - x)\vec{e}_1 + (y' - y)\vec{e}_2 + (z' - z)\vec{e}_3$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

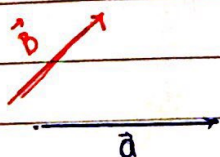
Εσωτερικό γινόμενο στον V_3 :

Ορισμός: Καλούμε εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ τον αριθμό $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \{ \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 \}$

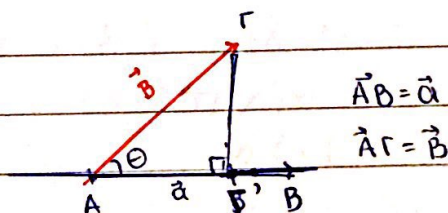
$$\begin{array}{l|l} \vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 & \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \vec{e}_2 + (a_3 + b_3) \vec{e}_3 \\ \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 & \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ & \|\vec{b}\| = \dots = \|\vec{a} + \vec{b}\| \end{array}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \{ (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 \}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$



$$\vec{a}_0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$



$A\Gamma'$ = προβολή του $\vec{b}$ πάνω στο $\vec{a}$

$$\theta = \kappa(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$$

$$\|\vec{A\Gamma'}\| = \|\vec{A\Gamma}\| |\cos \theta| = \|\vec{b}\| |\cos \theta|$$

Η διεύθυνση του $\vec{A\Gamma'}$ είναι αυτή του $\vec{a}$

Φορά του $\vec{A\Gamma'}$ είναι αυτή του $\vec{a}$ αν $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και αντίθετο του $\vec{a}$ αν $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\vec{A\Gamma'} = \|\vec{b}\| \cos \theta \vec{a}_0 = \frac{\|\vec{b}\| \cos \theta}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$$

αλγεβρική τιμή του $\vec{A\Gamma'}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$ τότε: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: θεωρώ ορθομοναδιαία βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ όπου $\vec{e}_1 = \vec{a}_0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$

$$\vec{0} = \|\vec{a}\| \vec{e}_1 = \|\vec{a}\| \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| b_1 = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$